Rekenstrategieën

Voor de basisbewerkingen optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen en voor het rekenen met breuken en rekenen met decimale getallen, wordt een overzicht gegeven van rekenstrategieën die door leerlingen kunnen worden gebruikt.

Optellen en aftrekken

De strategieën zijn onder te verdelen in verschillende categorieën

- traditioneel cijferen
- kolomsgewijs rekenen
- handig rekenen.

Traditioneel cijferen

De traditionele manier van cijferen, het koopmansrekenen, houdt in dat de getallen onder elkaar worden geplaatst en vervolgens van rechts naar links (per kolom) de bewerking wordt uitgevoerd. Wanneer men bij het optellen over het tiental heen gaat, wordt dit opgeschreven boven de volgende kolom (waar de tientallen staan). Bij het aftrekken wordt een tiental 'geleend':

 88
8~~99~~7
4698
____ -
4299

Kolomsgewijs rekenen

In de realistische rekenmethoden wordt het kolomsgewijs rekenen aangeleerd, waarbij ook per kolom wordt gerekend. In de methode Pluspunt, wordt enkel kolomsgewijs gerekend en komt het traditioneel rekenen geheel niet aan bod.

8997		8997
4698		4698
____ -		____ -
4000	8000-4000=4000	-1
300	900-600=300	00
00	90-90 =0	300
-1	7-8= 1 tekort!	4000
____ +		____ +
4299	4000 + 300+0 -1 = 4299	4299

Per kolom wordt steeds een tussenantwoord opgeschreven. Bij het aftrekken is hierbij opvallend dat bij een tekort er niet in de volgende kolom wordt geleend, maar dat er een tekort wordt opgeschreven. Leerlingen moeten in feite al met negatieve getallen kunnen rekenen. Tenslotte wordt alles wat na het aftrekken nog over is, weer bij elkaar opgeteld. Dit kan tot verwarring leiden, omdat een leerling bezig was met het aftrekken van twee getallen.

Handig rekenen

Het handig rekenen omvat een aantal verschillende oplossingsmethoden. Vaak wordt daarbij gewerkt met mooie ronde getallen, zodat het rekenen eenvoudiger wordt. Het handig rekenen is echter niet altijd toe te passen.

8997 = 9000 - 3

4698 = 4700 - 2

9000 – 4700 = 4300

8997 – 4700 = 4227

Dus: 8997 – 4698 = 4229

Vermenigvuldigen

De strategieën zijn onder te verdelen in verschillende categorieën

- traditioneel cijferen
- kolomsgewijs rekenen
- handig rekenen.
- herhaald optellen

Traditioneel cijferen

De traditionele manier van cijferen, het koopmansrekenen, houdt in dat de getallen onder elkaar worden geplaatst en vervolgens van rechts naar links (per kolom) de bewerking wordt uitgevoerd. Wanneer men bij het optellen over het tiental heen gaat, wordt dit opgeschreven boven de volgende kolom (waar de tientallen staan).

```
 4
 36
 18
___ x
288
360
___ +
648
```

Kolomsgewijs rekenen

In de realistische rekenmethoden wordt het kolomsgewijs rekenen aangeleerd, waarbij ook per kolom wordt gerekend.

36		36
18		18
___ x		___ x
300	10 x 30 = 300	48
60	10 x 6 = 60	240
240	8 x 30 = 240	60
48	8 x 6 = 48	300
___ +		___ +
648	300 + 60 + 240 + 48 = 648	648

Handig rekenen

Het handig rekenen maakt bij het vermenigvuldigen wederom gebruik van ronde getallen:

18 x 36 =
18 is bijna 20:

20 x 36 = 720
Dat is 2 x 36 te veel:

Dus 720 – 72 = 648

Ook kan gebruik worden gemaakt van verdubbelen en halveren:

18 x 36 = 9 x 72 = 9 x 70 + 9 x 2 = 630 + 18 = 648

Het herhaald optellen (i.c.m. handig rekenen):

18 x 36 =

18 = 10 + 8 daaruit volgt :

10 x 36 = 360
8 x 36 = 4 x 72 = 2 x 144 = 288
18 x 36 = 360 + 288 = 648

Delen

- Traditioneel cijferen: staartdeling
- Kolomsgewijs rekenen: hapmethode

Traditioneel cijferen

Het traditioneel cijferen gebruikt de staartdeling om getallen op elkaar te delen:

```
18 / 438 \ 24
      36
      __ -
       78
       72
       __ -
        6
438 : 18 = 24 rest 6
```

Bij niet-opgaand delen (met rest) leren leerlingen vervolgens om een komma te plaatsen en dan een extra nul aan te halen.

Kolomsgewijs rekenen

De hapmethode kent verschillende benamingen, zoals 'kolomsgewijs delen', 'er naar toe vermenigvuldigen' of 'herhaald aftrekken'. Bij de hapmethode wordt steeds (een zo groot mogelijke) hap van het te delen getal genomen. Vervolgens wordt dit deel eraf gehaald en wordt opnieuw geprobeerd een hap te nemen:

```
438  :  18  =     24    rest 6
180               10 x 18
___ -
 258
 180              10 x 18
___ -
 78
 72                4 x 18
___ -             ________ +
  6               24 x 18
```

In feite wordt geprobeerd om naar het te delen getal toe te vermenigvuldigen. Leerlingen worden daarom ook aangemoedigd om eerst een rijtje met producten op te schrijven.

Bij niet-opgaand delen (met rest) leren leerlingen vervolgens om:

- de rest te verdelen tot een breuk
- de breuk uit te drukken in een decimaal getal

Rekenen met breuken

Het rekenen met breuken begint op de basisschool met een verkenning van het begrip breuk in een context. Vervolgens wordt bij het rekenen met breuken aan leerlingen verschillende soorten rekenprocedures aangeleerd voor verschillende getalcombinaties. Via dit contextgebonden en modelondersteunend werken met breuken werken de kinderen toe naar een meer formele aanpak, waarin breuken als rekengetallen worden gezien. Toch zijn deze procedures vaak sterk gebonden aan contexten en komen hiervan niet los.

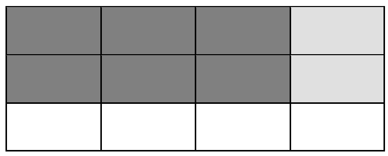
Vermenigvuldigen met breuken

In het traditionele rekenonderwijs leren kinderen één algoritme voor het vermenigvuldigen met breuken:

$$\frac{teller \times teller}{noemer \times noemer}$$

In realistische rekenmethodes wordt het vermenigvuldigen met breuken op een andere wijze benaderd. Bij de methode Pluspunt zegt de handleiding voor leerkrachten hierover: *"Algoritme teller x teller en noemer x noemer wordt niet expliciet aangeboden maar kunnen kinderen wel zelf ontdekken." (*Janssen, e.a., 2002)

Bij het vermenigvuldigen van breuken wordt een aantal verschillende soorten rekenprocedures aangereikt. Opvallend is dat ieder van deze strategieën steeds wordt gekoppeld aan één bepaald type som, waarbij de context erg belangrijk blijft:

	Oplossingsstrategie	Type opgave	Didactisch model
1	Herhaald optellen	Geheel getal keer een breuk $6 \times \frac{2}{3}$	Getallenlijn
2	Deel van	Breuk keer een geheel getal $\frac{2}{3} \times 6$	Stook opdelen : 6 2 | 2 | 2
3	Rechthoeksmodel	Breuk keer een breuk $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$	 6 van de 12 hokjes zijn gekleurd dus: $\frac{6}{12}$
4	Splitsen bij gemengde getallen	Gemengd getal keer een breuk	Gemengde getal splitsen in een geheel getal en een breuk. hiermee apart verder rekenen. Vervolgens rekenen volgens de overige oplossingsstrategieën

Kanttekening hierbij is dat in de lesmethodes op de basisschool wordt bij opgaven steeds de mogelijke rekenstrategie aangereikt. Leerlingen leren dus niet zelf een procedure kiezen, maar enkel een procedure toepassen. (Gravemeijer e.a., 2009)

Delen door breuken

In het traditionele rekenonderwijs leren kinderen één algoritme voor het delen met breuken:

> “Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde”

In realistische rekenmethodes wordt het delen door breuken altijd in een context behandeld. Het gaat hierbij om eenvoudige delingen: een geheel getal door een breuk, breuk door een geheel getal.

Hierbij worden twee rekenstrategieën aangeboden (Tussendoelen Annex Leerlijnen, 2006):

- herhaald aftrekken (hapmethode)
- rekenen met de verhouding tussen het getal en de breuk

Breuken delen door breuken, wordt niet behandeld. Een rekenstrategie voor het delen door breuken wordt dus niet aangeleerd.

Rekenen met decimale getallen

Allereerst moet worden opgemerkt dat als het gaat om decimale getallen in het realistische rekenonderwijs de nadruk ligt op het elementaire hoofdrekenen en het schattend rekenen. Er wordt veel aandacht besteed aan het betekenis geven aan decimale getallen. (Buys, K., 2005)

Aan het rekenen volgens standaardprocedures wordt minder belang gehecht: voor uitgebreide bewerkingen met kommagetallen wordt verwezen naar de rekenmachine. Juist daarom wordt het schattend rekenen met decimale getallen als extra belangrijk gezien. Een leerling moet kunnen inschatten of een antwoord op de rekenmachine kan kloppen.

Verder zijn belangrijke leerdoelen die samenhangen met decimale getallen het rekenen met miljoen- en miljard kommagetallen en het afronden hiervan. Ook de relatie tussen een breuk en een decimaal getal en de decimale structuur worden behandeld, maar lijken tot de differentiatiestof voor de betere leerling te behoren. (Buys, K., 2005)

Vermenigvuldigen met decimale getallen

- traditioneel cijferen
- kolomsgewijs rekenen (vermenigvuldigen decimaal getal met geheel getal)
- herhaald optellen (vermenigvuldigen decimaal getal met geheel getal)
- maatwisseling (vermenigvuldigen decimaal getal met decimaal getal)

In de rekenmethodes is er veel aandacht voor het vermenigvuldigen van een decimaal getal met 10 en 100 en 1000. Leerlingen leren hierbij hoe ‘de komma verschuift’ en er ‘nullen bijkomen’.

Traditioneel cijferen

In het traditionele rekenonderwijs wordt bij het vermenigvuldigen met decimale getallen uitgegaan van het algoritme:

> “De som van aantal cijfers achter de komma in de te vermenigvuldigen getallen, geeft het aantal cijfers achter de komma in het antwoord.”

```
  45,3
  27
_____ x
 317,1
 906,0
_____+
1223,1
```

Kolomsgewijs rekenen en herhaald optellen

In het realistische rekenonderwijs worden verschillende strategieën gebruikt, afhankelijk van het type som. Wanneer een decimaal getal met een geheel getal wordt vermenigvuldigd, kan ofwel gebruik worden gemaakt van kolomsgewijs rekenen, ofwel van herhaald optellen:

Kolomsgewijs:		Herhaald optellen:
45,3		
27		27 x 45,3 =
__ ___ x		27 = 20 + 7 daaruit volgt :
800	20 x 40 = 800	10 x 45,3 = 453
100	20 x 5 = 100	20 x 45,3 = 906
6	20 x 0,3 =6	2 x 45,3 = 90,6
280	7 x 40 = 280	5 x 45,3 = 453: 2 = 226,5
35	7 x 5 = 35	7 x 45,3 = 90,6 + 226,5 = 317,1
2,1	7 x 0,3 = 2,1	
_____ +		27 x 45,3 = 906 + 317,1 = 1213,1
1100		
110		
13		
0,1		
_____ +		
1223,1		

Een maatwisseling wordt bijvoorbeeld gebruikt wanneer er sprake is van een vermenigvuldiging van een decimaal getal met een decimaal getal. Bijvoorbeeld door in een contextopgave € 45,3 te vervangen door 4530 cent. vervolgens wordt 4530 x 27 uitgerekend. Daarna wordt weer teruggerekend naar euro's door het resultaat te delen door 100.

Delen door decimale getallen

- traditioneel cijferen
- kolomsgewijs rekenen (delen geheel getal door decimaal getal)
- maatwisseling (voor het opdelen van de rest in decimalen)
- decimale getallen omzetten naar breuken

Traditioneel cijferen

In het traditionele rekenonderwijs leren kinderen bij het delen door een decimaal getal, dat net zoals bij het vermenigvuldigen, het aantal getallen achter de komma moeten worden geteld:

> "Het aantal cijfers achter de komma (zonder de nullen) van het te delen getal min het aantal cijfers achter de komma (zonder de nullen) van het getal waardoor je deelt, geeft het aantal cijfers achter de komma in het antwoord."

In feite wordt hierbij dus gebruik gemaakt van maatwisseling. Deze regel kan als volgt worden toegepast:

$$750 : 0{,}30$$

Hierbij deel je eerst 750 door 3:

$$750 : 3 = 250$$

750 heeft géén getal achter de komma, 0,3 heeft één getal achter de komma (de nul niet meegerekend), dus het antwoord moet met 10 worden vermenigvuldigd :

$$750 : 0{,}30 = 2500$$

Kolomsgewijs rekenen

Het kolomsgewijs rekenen gaat uit van het herhaald aftrekken:

750 : 0,3 =	2500
300	1000 x 0,3
___ -	
450	
300	1000 x 0,3
___ -	
150	
150	500 x 0,3
___ -	________ +
0	2500 x 0,3

Maatwisseling

Maatwisseling wordt kan worden gebruikt als een vorm van handig rekenen (Pluspunt):

$$750 : 0{,}3 =$$

Vermenigvuldig zowel 750 als 0,3 met 10:

$$7500 : 3 = 2500$$

Waarom je 750 en 0,3 beiden met 10 mag vermenigvuldigen (er is sprake van een verhouding tussen twee getallen) wordt toegelicht in de context van het geldrekenen of het rekenen met gewicht.

Zowel het kolomsgewijs delen als het gebruik van maatwisseling zijn met name bedoeld als rekenstrategie bij het delen van een geheel getal door een decimaal getal. Wat is echter de realistische strategie als een decimaal getal door een decimaal getal moet worden gedeeld?

Deze vraag, voorgelegd aan leerkrachten uit het basisonderwijs, leverde een strategie op waarbij decimale getallen worden omgezet naar een breuk.

7,5 : 0,3 =

Van beide kommagetallen wordt een breuk gemaakt:

$$7\frac{1}{2} : \frac{3}{10} =$$
$$\frac{15}{2} : \frac{3}{10} =$$

Daarna zou verder worden gerekend volgens de regel “delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde”.

$$\frac{15}{2} : \frac{3}{10} =$$

$$\frac{15}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{150}{6} = \frac{25}{1} = 25$$

Het gebruik van deze oplossingstrategie vereist dat het delen door een breuk wordt beheerst. Dit vormt een potentiële belemmering bij het gebruik van deze strategie, want de regel om te delen door breuken wordt in de rekenmethodes niet expliciet aangeleerd.

Men kan dus voorzichtig stellen dat het delen door kommagetallen slechts beperkt wordt aangeleerd. Het is waarschijnlijk dat de zwakke rekenaar enkel strategieën leert om een geheel getal te delen door een decimaal getal.